3 MAT II

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ÍNDICE

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ECUACIÓN

Llamaremos ecuación a una igualdad que establece relaciones numéricas entre variables o cantidades desconocidas —llamadas incógnitas—.

Los datos en un problema científico me dan las ecuaciones.

ECUACIÓN LINEAL

Aquélla formada por un polinomio de grado 1.

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN

Son los valores que sustituidos en las incógnitas verifican la igualdad. Una ecuación es su solución. Son la misma cosa.

Grados de libertad o de indeterminación. Parámetros libres.

Son las incógnitas que quedan libres de tomar cualquier valor en la solución.

Por ejemplo, en la ecuación:

Dos números suman 20.

x+y=20 −1 libre−

Mostrar las distintas formas de expresar la solución:

$$y = 20 - x; \begin{cases} x = x \\ y = 20 - x \end{cases}; \begin{cases} x = t \\ y = 20 - t \end{cases}$$

Tres números suman 6.

x+y+z=6 −2 libres−

El número de grados de libertad de una ecuación lineal es uno menos que el de incógnitas.

RESOLUCIÓN

Resolución es el proceso que lleva a la solución.

Sistema

Es un conjunto de ecuaciones lineales que se refieren al mismo problema.

Solución de un sistema

Son aquellos valores que son solución de TODAS las ecuaciones del sistema A LA VEZ.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Operaciones elementales

1. Cambiar de orden dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un escalar $\neq 0$.
3. Sumar una ecuación a otra.
4. A una ecuación se le suma (propiedad 3) el producto de un escalar por otra (prop. 2)

Ejemplo

Hacerlo con: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

3. MÉTODO DE GAUSS

Diagonal de un sistema de ecuaciones

Se llama así a los coeficientes de un sistema que ocupan el mismo lugar de fila –ecuaciones– que de columna –incógnitas–.

$$\begin{cases} \mathbf{1}x + 2y + 3z = 2 \\ x + \mathbf{3}y - z = -2 \\ 3x + 4y + \mathbf{3}z = 0 \end{cases}$$

Sistema escalonado

Es aquél que tiene todos los coeficientes de la diagonal diferentes de cero. O que cambiando de orden las incógnitas se pudiera conseguir uno escalonado. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \quad\ \ y + z = 1 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS

Es el método que consiste en pasar de un sistema de ecuaciones a otro escalonado y equivalente mediante operaciones elementales. Al elemento del sistema que utilizo para hacer ceros se llama 'pivote'.

La solución se construye a partir de la última ecuación que sufre reducción.

Trabajar con las incógnitas, pero sólo al principio. Luego en forma matricial.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2. Interesante

Resolver $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$

En el fondo es conseguir que con una fila haga un cero en otra. Esa fila ya no se toca y la columna del cero tampoco. Después sucesivamente hasta que ya no haya más posibilidades.

Se llama método de Gauss-Jordan al que consigue una matriz diagonal. Cada 'pivote' lo utilizamos para hacer 0 en toda la columna. Al final, las soluciones salen aisladas en cada ecuación.

CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Comentarlo sobre la marcha de los ejercicios. No ser tan formalista.

Incompatible

• Que nos aparezca una ECUACION IMPOSIBLE. Entonces el sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Compatible

• Que no nos aparezca ninguna ecuación imposible. Entonces tiene solución–es y se dice que el sistema es COMPATIBLE. Dentro de esta segunda posibilidad puede darse a su vez una doble alternativa:

Determinado

– Que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas. Entonces la solución es única. El sistema se dice que es COMPATIBLE DETERMINADO.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

Indeterminado.

– Que el número de ecuaciones sea menor que el de incógnitas. Entonces la solución es múltiple. El sistema se dice que es COMPATIBLE INDETERMINADO. Siendo el número de incógnitas que quedan libres igual al nº de ecuaciones menos el de incógnitas.

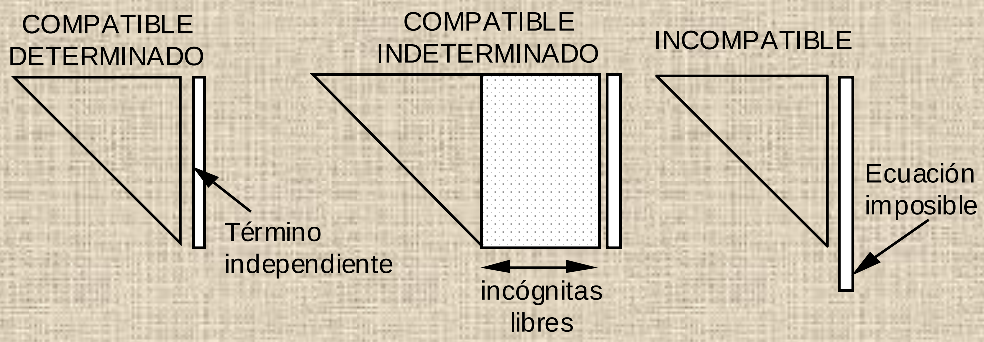
$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

Por ejemplo, elegir alguno según convenga.

$a)\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$	2 ecuaciones 2 incógnitas	Trabajar con éste.
$b)\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ 4x + y + 2z = 11 \end{cases}$	2 ecuaciones 3 incógnitas	

$c)\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x-3y-2z=-1 \\ x-y+2z=2 \\ x-y \quad\quad = 2 \end{cases}$	4 ecuaciones 3 incógnitas	

Aspecto del sistema reducido: No es preciso dar.



5. TEOREMA ROUCHÉ

Para un sistema de ecuaciones lineales llamaremos A −matriz de los coeficientes− y A′ −matriz ampliada−; es decir, con el término independiente. Estas matrices se pueden considerar como los vectores de las incógnitas por un lado y éstas con el término independiente por otro.

Teorema de Rouché:

Compatible $\Leftrightarrow$ rg(A)=rg(A′)

Es decir, si el término independiente es c.l. de los vectores de las incógnitas.

Ejemplo

$$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ -2x+y-3z=1 \\ 2x-7y+z=9 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Ejemplos:

Estudiar los sistemas siguientes: $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=1 \\ 3x+6y=5 \end{cases}$

6. REGLA DE CRAMER

Sea un sistema de ecuaciones lineales con |A| $\neq$ 0. Esto ya implica dos cosas, que A es cuadrada y con determinante $\neq$ 0. Por Rouché ya sabemos que es compatible.

Se cumple que:

$x_i = \dfrac{|A_{x_i}|}{|A|}$ donde A_{x_i} es la matriz que resulta de sustituir la columna de x_i por B

Es decir, sustituimos la columna i de la matriz de los coeficientes por el término independiente.

Ejemplo1

Resolver por Cramer el sistema: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

Ejemplo 2:

Lo mismo para: $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

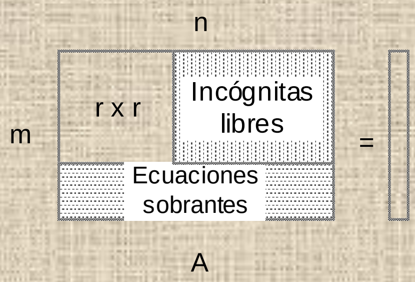
7. RESOLUCIÓN DE CUALQUIER SISTEMA

$$\begin{array}{l} m \quad ecuaciones \; -filas- \\ n \quad incógnitas \; -cols- \end{array} \begin{cases} rg \quad A \neq rg \quad A' \quad INCOMPATIBLE \\ rg \quad A = rg \quad A' = r \quad COMPATIBLE \begin{cases} r = n & DETERMINADO \\ & Solución \quad única \\ r < n & INDETERMINADO \\ & n-r \quad parámetros \quad libres \end{cases} \end{cases}$$

Para resolverlo si es compatible

Una vez localizado el máximo menor diferente de 0 (suponemos para simplificar que está arriba a la izquierda).

Las filas que están fuera del menor me indican todas las ecuaciones sobrantes. Y las columnas que quedan fuera me indica las incógnitas libres que pasamos al segundo miembro. Ahora estamos en las condiciones de Cramer.



Ejemplo1. Vamos a resolver: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$

Ejemplo 2. $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ -2x+y-3z=1 \\ 2x-7y+z=9 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 1 & 9 \end{array}\right)$

8. SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Término independientes todos nulos.
Siempre posee la solución trivial.

Para que tenga más soluciones será preciso que rg(A) < número de incógnitas

9. DISCUSIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Si son coeficientes numéricos empezaremos por los menores de orden menor. Si contiene parámetros libres el sistema lo haremos por los de orden mayor.

10. FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Se podría resolver por la inversa de la matriz de los coeficientes, siempre que exista.

Hacer demostración del proceso:

$A \cdot X = B$; $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $X = A^{-1} \cdot B$

11. RESERVA

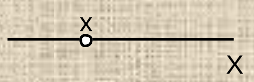
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

No es necesario darlo como punto. Sobre todo, porque luego se trabajará en geometría.

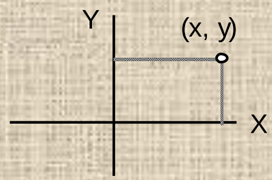
Se comenta al hilo del desarrollo del tema la interpretación geométrica.

En principio una incógnita puede tomar cualquier valor real. Por lo tanto, geométricamente, el campo de posibilidades para las soluciones de una ecuación vendrá dado por:

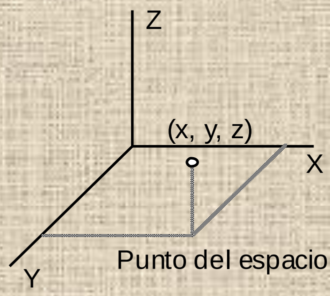
- La recta real: R. Ecuaciones con una incógnita.
- El plano: R^2. Ecuaciones con dos incógnitas.
- El espacio: R^3. Ecuaciones con tres incógnitas.



Punto de la recta



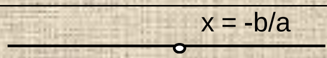
Punto del plano



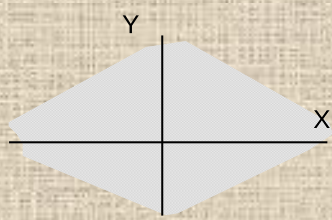
Punto del espacio

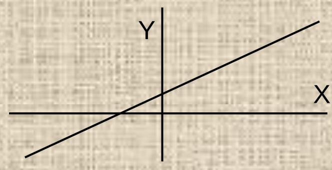
Ahora bien, de entre todas las posibilidades que existen para las incógnitas se verifica lo siguiente:

• *Ecuación con 1 incógnita:*

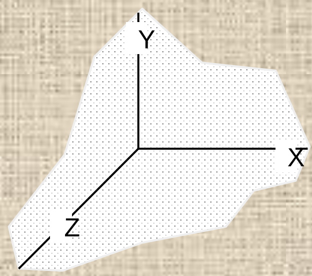
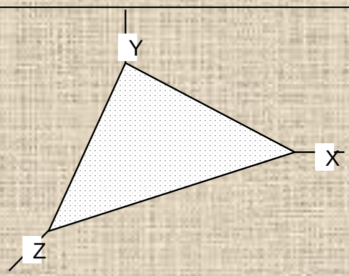
a) $0x = 0$	Toda la recta	
b) $0x = k \neq 0$	Ningún valor	
c) $ax = b$ $(a \neq 0)$	Un punto	

• *Ecuación con 2 incógnitas:*

a/ $0x + 0y = 0$	Todo el plano	
b/ $0x + 0y = k \neq 0$	Ningún valor	

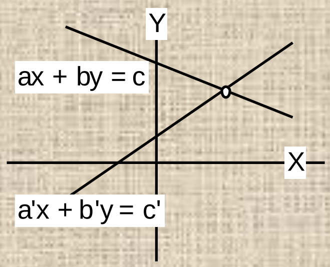
c) $ax + by = c$ ($a \neq 0$ ó $b \neq 0$)	Una recta	

• *Ecuación con 3 incógnitas:*

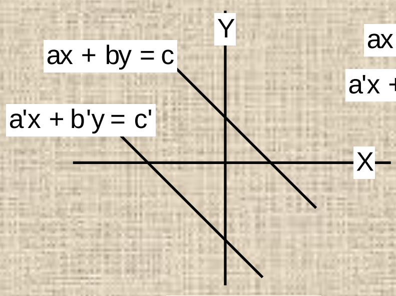
a/ $0x + 0y + 0z = 0$	Todo el espacio	
b/ $0x + 0y + 0z = k \neq 0$	Ningún valor	
c/ $ax + by + cz = d$ ($a \neq 0$ ó $b \neq 0$ ó $c \neq 0$)	Un plano	

Representación geométrica de la solución de un sistema

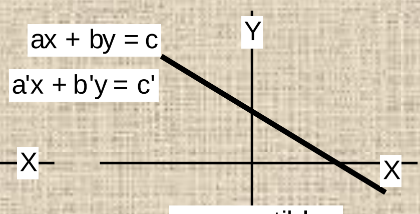
Una vez representado el equivalente geométrico de cada ecuación del sistema, los puntos comunes a todas ellas sería la solución del sistema. Es decir, la intersección de todas las figuras. Por ejemplo, está serían las posibles situaciones de un sistema 2x2.



compatible determinado



incompatible



compatible indeterminado

Para tres incógnitas el análisis sería análogo.

Representación de plano en el espacio

Según hemos visto una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano en el espacio. Vamos a ver cómo representarlo en el espacio.

Sea el plano de ecuación:

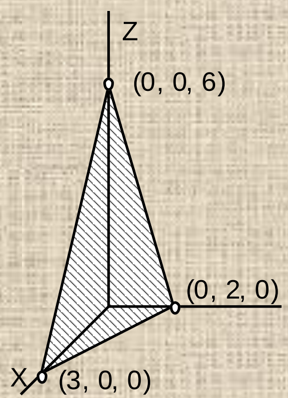
$2x + 3y + z = 6$

Es claro que tiene dos parámetros libres y por tanto gráficamente corresponde a la ecuación de un plano en el espacio.

Hacemos $x = 0$; $y = 0$ entonces $z = 6$. Corte con el eje Z es el punto (0, 0, 6).

Haciendo $x = 0$; $z = 0$ tendremos que $y = 2$. Corte con el eje Y es el punto (0, 2, 0).

Haciendo $y = 0$; $z = 0$ obtenemos $x = 3$. Corte con el eje X es el punto (3, 0, 0).



NOTA.- El plano en cuestión, continuaría por detrás de los planos XY, XZ, YZ. Esta zona que vemos señalada correspondería a la zona positiva de los tres ejes.

Haz lo mismo para:

$x + 2y + z = 4$

Lo mejor es dejar las demostraciones que se consideren oportunas para el final. No darlas al hilo del tema porque se hace más duro. Es mejor primero ver la práctica y después el fundamento teórico.

TEOREMA DE ROUCHÉ

Sea: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\vec{A}_1 \quad \vec{A}_2 \quad \ldots \quad \vec{A}_n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es compatible si y sólo si:

$$\vec{B} \ \ es \ \ c.l. \ \ de \ldots \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_n$$

Es decir, si rg(A) = rg(A′)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=8 \\ x+y-z=-3 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right); \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_1 \cdot x + \vec{A}_2 \cdot y + \vec{A}_3 \cdot z = \vec{B}$$

Es claro que el sistema tendrá solución si $\vec{B}$ *es c.l. de* $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$

Esto es lo mismo que decir que el rg(A) = rg(A′)

En el ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-2) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_1 \cdot (-2) + \vec{A}_2 \cdot 2 + \vec{A}_3 \cdot 3 = \vec{B}$$

REGLA DE CRAMER

Dem (para simplificar la notación lo hacemos para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas)

Para despejar la "x" basta multiplicar cada ecuación por el respectivo adjunto de la columna primera.